View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Munich RePEc Personal Archive

MPRA
Munich Personal RePEc Archive

Consumer theory: duality, elasticities, constraints of the demand and welfare.

Eloy Ávalos

Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Instituto de Estudios Sociales del Rímac

4. April 2011

Online at http://mpra.ub.uni-muenchen.de/41895/
MPRA Paper No. 41895, posted 12. October 2012 13:27 UTC

CIEC

Centro de Investigaciones Económicas

Documento de Trabajo Nº 12

La Teoría del Consumidor: Dualidad, Elasticidades, Restricciones de la Demanda y Bienestar

por

Eloy Ávalos

Abril 4, 2011

Instituto de Estudios Sociales del Rímac
Lima, Perú

LA TEORÍA DEL CONSUMIDOR: DUALIDAD, ELASTICIDADES, RESTRICCIONES DE LA DEMANDA Y BIENESTAR

Eloy ÁVALOS[1]
Universidad Nacional Mayor de San Marcos e IESR

Primera versión: Abril 2011

Resumen

En el presente documento exploraremos la minimización de gasto, deduciendo de este planteamiento importantes teoremas, que deben de cumplirse dadas las condiciones de las preferencias y del conjunto presupuestario. Estudiaremos las condiciones de restricciones de la demanda, relacionándolas con las diversas elasticidades de la demanda marshalliana y hicksiana y finalmente abordaremos el análisis sobre el bienestar del consumidor ante cambios en los precios.

Número de Clasificación JEL: D01, D11.
Palabras Claves: Función indirecta de utilidad, función de gasto mínimo, lema de Shephard, identidad de Roy, elasticidades, variación compensatoria, variación equivalente, excedente del consumidor.

Abstract

In this paper we explore the minimization of expenditure, less important theorems of this approach, which must be met given the conditions of the preferences and the budget set. We will study the conditions of constraints of the demand, relating them to the different elasticities of Marshallian and Hicksian demands. Finally we will discuss the analysis of consumer welfare when prices change.

Classification Number JEL: D01, D11.
Key Words: Indirect utility function, minimum expenditure function, Shephard's lemma, Roy identity, elasticities, compensating variation, equivalent variation, consumer surplus.

---

[1] Contacto: Departamento de Economía, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima 01, Teléfono 619-7000 Anexo 2207; y Centro de Investigaciones Económicas del Instituto de Estudios Sociales del Rímac, Pueblo Libre. Email: eavalosa@unmsm.edu.pe.

1. INTRODUCCIÓN

La existencia de la función matemática, llamada función de utilidad, que representa las preferencias, permite arribar del problema de la elección del consumidor a la teoría de la demanda individual. Esta función matemática se representa como una función continua y diferenciable. Esto permite establecer la noción de elasticidad y realizar un análisis del bienestar del consumidor ante cualquier variación en los precios, sea uno o todos los que varíen.

2. DUALIDAD DEL CONSUMIDOR

Sea un espacio de consumo dado por $X_i = \mathbb{R}^n_+$, sobre el cual se define una relación de preferencia débil $\succsim_i$, que es completa, transitiva, continua, estrictamente convexa y monótona; y que puede representarse por una función matemática $u_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente cuasi – cóncava y monótona. Además, se tiene que $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ y $m_i^0 > 0$. Entonces, el problema de elección del consumidor se puede formular de las siguientes formas, como una maximización y como una minimización,

$$\left.\begin{array}{ll} \max & u_i(\mathbf{x}) \\ \text{s. a.} & m_i^0 - \mathbf{px}' \geq 0 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \; [P] \qquad \left.\begin{array}{ll} \min & \mathbf{px}' \\ \text{s. a.} & u_i^0 - u_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \; [D]$$

$$\text{Solución:} \quad \mathbf{x}^m\left(\mathbf{p}, m_i^0\right) \qquad \text{Solución:} \quad \mathbf{x}^h\left(\mathbf{p}, u_i^0\right)$$

2.1 Función indirecta de utilidad

Si $\mathbf{x}^m$ es solución de $[P]$ donde la función objetivo es $u_i(\mathbf{x})$; entonces se puede tener para la solución,

$$u_i\left(\mathbf{x}^m\right) = u_i\left[\mathbf{x}^m\left(\mathbf{p}, m_i^0\right)\right] = v_i\left(\mathbf{p}, m_i^0\right) = v_i$$

Donde $v_i = v_i\left(\mathbf{p}, m_i^0\right)$ es la llamada función indirecta de utilidad. Esta función, $v_i : \mathbb{R}_{+}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia el vector par $\left(\mathbf{p}, m_i^0\right)$ a un nivel de utilidad y presenta las siguientes propiedades,

i. $v_i(\mathbf{p}, m_i)$ es continua en $(\mathbf{p}, m_i)$, $\forall(\mathbf{p}, m_i) >> \mathbf{0}$.

ii. $v_i(\mathbf{p}, m_i)$ es homogénea de grado cero en $(\mathbf{p}, m_i)$. Así,

$v_i(\mathbf{p}, m_i) = v_i(\lambda\mathbf{p}, \lambda m_i) \quad , \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}_{++}$

iii. $v_i(\mathbf{p}, m_i)$ es decreciente respecto a $\mathbf{p}$ y estrictamente creciente en m_i.

iv. $v_i(\mathbf{p}, m_i)$ es una función estrictamente cuasi – convexa en $\mathbf{p}$.

2.2 Función de gasto mínimo

Sea $\mathbf{x}^h$ la solución del dual, luego podemos reemplazar esta solución en la función objetivo,

$$\mathbf{p}\mathbf{x}^h = \mathbf{p}\mathbf{x}^h\left(\mathbf{p}, u_i^0\right) = G_i\left(\mathbf{p}, u_i^0\right) = G_i$$

Donde $G_i = G_i\left(\mathbf{p}, u_i^0\right)$ es la función de gasto mínimo. Esta función $G_i\left(\mathbf{p}, u_i^0\right) : \mathbb{R}_{++}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ que relaciona un vector de precios y un nivel de utilidad referencial con un gasto mínimo. Sus propiedades son,

i. $G_i\left(\mathbf{p}, u_i^0\right)$ es continua en $\left(\mathbf{p}, u_i^0\right)$, $\forall\left(\mathbf{p}, u_i^0\right) >> \mathbf{0}$.

ii. $G_i\left(\mathbf{p}, u_i^0\right)$ es homogénea de grado uno en $\mathbf{p}$. Así, tenemos que,

$\lambda G_i\left(\mathbf{p}, u_i^0\right) = G_i\left(\lambda\mathbf{p}, u_i^0\right) \quad , \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}_{++}$

iii. $G_i\left(\mathbf{p}, u_i^0\right)$ es creciente en $\mathbf{p}$ y es estrictamente creciente en u_i^0.

iv. $G_i\left(\mathbf{p}, u_i^0\right)$ es cóncava en precios $\mathbf{p}$.

2.3 Implicancias de la dualidad

a. Lema de Shephard

Por el teorema de la envolvente, dada la función de gasto mínimo, $G_i\left(\mathbf{p},u_i^0\right)$, se tiene,

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial p_k}=\lambda\frac{\partial G_i}{\partial p_k}-\lambda x_k^h=0 \quad , \quad \forall k=1,2,\ldots,n.$$

De donde,

$$\frac{\partial G_i}{\partial p_k}=x_k^h \quad , \quad \forall k=1,2,\ldots,n.$$

b. Identidad de Roy

Utilizando la $v_i\left(\mathbf{p},m_i\right)$ y el teorema de la envolvente, se tiene,

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial p_k}=\frac{\partial v_i}{\partial p_k}-\lambda x_k^m=0 \quad , \quad \forall k=1,2,\ldots,n.$$

Luego, respecto al ingreso,

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial m_i}=\frac{\partial v_i}{\partial m_i}+\lambda=0$$

Despejando y dividiendo la primera ecuación entre la segunda, se tiene,

$$x_k^m=-\frac{\dfrac{\partial v_i}{\partial p_k}}{\dfrac{\partial v_i}{\partial m_i}} \quad , \quad \forall k=1,2,\ldots,n.$$

c. Ecuación de Slutsky

De acuerdo al programa de optimización $[P]$ y al programa dual $[D]$, es posible, dado $u_i(\cdot)$ para un valor determinado como u_i^0, y dado un vector de precios, $\mathbf{p}_0$, tener,

$$\mathbf{x}^m=\mathbf{x}^h$$
$$\mathbf{x}^m\left(\mathbf{p},m_i\right)=\mathbf{x}^h\left(\mathbf{p},u_i^0\right)$$

Luego, diferenciando respecto a un precio de un bien determinado, p_k, se tiene,

$$\frac{\partial\mathbf{x}^m}{\partial p_k}+\frac{\partial\mathbf{x}^m}{\partial m_i}\frac{\partial G_i}{\partial p_k}=\frac{\partial\mathbf{x}^h}{\partial p_k}$$

A continuación deducimos,[2]

$$\frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial p_k}=\frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial p_k}-\frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial m_i}\frac{\partial G_i}{\partial p_k}$$

Y dado que el gasto mínimo variará en una magnitud equivalente a la cantidad ante un cambio infinitesimal del precio, se tiene,

$$\frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial p_k}=\frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial p_k}-x_k^m\frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial m_i}$$

Donde,

$\frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial p_k}$ mide el efecto sustitución.

$x_k^m\frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial m_i}$ mide el efecto ingreso.

$\frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial p_k}$ es el efecto total.

Entonces, de la dualidad del consumidor, se puede plantear un conjunto de relaciones importantes, las cuáles serán útiles para resolver un conjunto de problemas. Por ejemplo, podemos encontrar a partir de la función de gasto mínimo la función de demanda marshalliana.

Así procederemos, primero invirtiendo la función de gasto mínimo y a continuación despejamos la función indirecta de utilidad. Luego, aplicamos la identidad de Roy para llegar finalmente a la demanda marshalliana.

Veamos en el siguiente esquema las relaciones posibles que se pueden obtener dada la dualidad del programa de optimización en la que se presenta la elección del consumidor,

---

2 Otra forma de deducir la ecuación de Slutsky es a partir de las condiciones de primer orden del programa de optimización, tal como hicimos en ÁVALOS (2010: p. 14 – 24).

$$\left.\begin{array}{ll} \max & u_i(\mathbf{x}) \\ \text{s. a.} & m_i^0 - \mathbf{px}' \geq 0 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} [P] \qquad \left.\begin{array}{ll} \min & \mathbf{px}' \\ \text{s. a.} & u_i^0 - u_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} [D]$$

$$\begin{tikzcd}
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \text{Demanda Marshalliana} & & \text{Demanda Hicksiana} & \\
 & x_k^m(\mathbf{p},m_i^0) \arrow[d] \arrow[rr, shift left] \arrow[ddrr, dash] & & x_k^h(\mathbf{p},u_i^0) \arrow[d] \arrow[ll, shift left] \arrow[ddll, dash] & \\
\text{Identidad de Roy} \arrow[ur] & u_i = u_i(\mathbf{x}^m) \arrow[d] & & \mathbf{px}^h \arrow[d] & \text{Lema de Shepard} \arrow[ul] \\
 & v_i = v_i(\mathbf{p},m_i^0) \arrow[rr, shift left] \arrow[ul] & & G_i = G_i(\mathbf{p},u_i^0) \arrow[ll, shift left] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Verificándose las siguientes propiedades,

i. $G_i\left[\mathbf{p}, v_i\left(\mathbf{p}, m_i^0\right)\right] = m_i^0$

ii. $v_i\left[\mathbf{p}, G_i\left(\mathbf{p}, u_i^0\right)\right] = u_i^0$

iii. $\mathbf{x}^m\left(\mathbf{p}, m_i^0\right) = \mathbf{x}^h\left[\mathbf{p}, v_i\left(\mathbf{p}, m_i^0\right)\right]$

iv. $\mathbf{x}^h\left(\mathbf{p}, u_i^0\right) = \mathbf{x}^m\left[\mathbf{p}, G_i\left(\mathbf{p}, u_i^0\right)\right]$

3. ELASTICIDADES

La elasticidad mide la sensibilidad de la cantidad demandada ante un cambio de una de las variables que la afectan. Se mide como un ratio, de un cambio proporcional de la cantidad demandada entre un cambio proporcional en alguna otra variable que provoca el cambio. La elasticidad de la demanda se puede calcular sea ésta la demanda marshalliana o la demanda hicksiana.[3]

---

[3] Además, Becker señala que el concepto de elasticidad es principalmente importante porque permite analizar los efectos de un cambio en los precios sobre el ingreso monetario total de las empresas,

$$IM = p_k\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$

3.1 Elasticidad de la demanda - precio

a. Demanda marshalliana

Sea la elasticidad de la demanda marshalliana - precio,

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial x_1^m}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1^m} \text{ o también } \varepsilon_1 = \frac{\partial \ln x_1^m}{\partial \ln p_1}$$

De donde,

$\left|\varepsilon_1\right| > 1 \Leftrightarrow \text{demanda inelástica}$.

$\left|\varepsilon_1\right| < 1 \Leftrightarrow \text{demanda elástica}$.

$\varepsilon_1 = 0 \Leftrightarrow \text{demanda perfectamente inelástica}$.

$\varepsilon_1 = \infty \Leftrightarrow \text{demanda perfectamente elástica}$.

b. Demanda hicksiana

Sea la elasticidad,

$$\eta_1 = \frac{\partial x_1^h}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1^h} \text{ o también } \eta_1 = \frac{\partial \ln x_1^h}{\partial \ln p_1}$$

3.2 Elasticidad de la demanda - cruzada

a. Demanda marshalliana

Sea la elasticidad de la demanda marshalliana - cruzada,

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial x_1^m}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1^m} \text{ o también } \varepsilon_{12} = \frac{\partial \ln x_1^m}{\partial \ln p_2}$$

De donde,

$\varepsilon_{12} > 0 \Leftrightarrow B_1 \text{ y } B_2 \text{ son sustitutos brutos}$.

$\varepsilon_{12} < 0 \Leftrightarrow B_1 \text{ y } B_2 \text{ son complementarios brutos}$.

Véase, BECKER (1977: p. 25). De la misma forma, ver FRIEDMAN (1976: p. 31).

b. Demanda hicksiana

Sea la elasticidad de la demanda hicksiana - cruzada,

$\eta_{12} = \frac{\partial x_1^h}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1^h}$ o también $\eta_{12} = \frac{\partial \ln x_1^h}{\partial \ln p_2}$

De donde,

$\eta_{12} > 0 \Leftrightarrow B_1$ y B_2 son sustitutos netos.

$\eta_{12} < 0 \Leftrightarrow B_1$ y B_2 son complementarios netos.

3.2 Elasticidad de la demanda - ingreso

Sea la elasticidad de la demanda – ingreso, medida como,

$\iota_1 = \frac{\partial x_1^m}{\partial m_i}\frac{m_i}{x_1^m}$ o también $\iota_1 = \frac{\partial \ln x_1^m}{\partial \ln m_i}$

De donde,

$\iota_1 > 0 \Leftrightarrow B_1$ es un bien normal o superior.

$\iota_1 = 0 \Leftrightarrow B_1$ es un bien neutro.

$\iota_1 < 0 \Leftrightarrow B_1$ es un bien inferior.

4. RESTRICCIONES DE LA DEMANDA

4.1 Condición de agregación de Engel

De la condición de equilibrio y de la restricción presupuestaria, se tiene,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^m(\mathbf{p}, m_i) = m_i$$

Diferenciando respecto a un cambio del ingreso monetario se obtiene,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_k^m}{\partial m_i} dm_i = dm_i$$

Luego, multiplicamos y dividimos $x_k^m m_i$ por el cambio del gasto en cada bien; y reordenando se obtiene,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k x_k^m}{m_i} \frac{\partial x_k^m}{\partial m_i} \frac{m_i}{x_k^m} = 1$$

Reemplazando las notaciones de elasticidades de la demanda – precio y de los pesos de gastos en cada uno de los bienes, se tiene,

$$\sum_{k=1}^{n} s_k \iota_k = 1$$

Donde, s_k es la proporción del gasto en el bien B_k respecto al ingreso monetario del consumidor. Para el caso donde $X_i = \mathbb{R}_+^2$, se tiene:

$$s_1 \iota_1 + s_2 \iota_2 = 1$$

De donde derivamos,

$$s_2 \iota_2 = 1 - s_1 \iota_1$$

Y dado que las proporciones de gasto en cada uno de los bienes, s_1 y s_2, pertenecen al intervalo $(0,1)$; entonces tenemos la siguiente tabla de correspondencia entre ambos bienes,

B_1		B_2	
Inferior	$\iota_1 < 0$	Superior	$\iota_2 > \frac{1}{s_2}$
Neutro	$\iota_1 = 0$	Superior	$\iota_2 = \frac{1}{s_2}$
Normal	$0 < \iota_1 < 1$	Superior	$\frac{1}{s_2} > \iota_2 > 1$
Normal	$\iota_1 = 1$	Normal	$\iota_2 = 1$
Superior	$\frac{1}{s_1} > \iota_1 > 1$	Normal	$1 > \iota_2 > 0$
Superior	$\iota_1 = \frac{1}{s_1}$	Neutro	$\iota_2 = 0$
Superior	$\iota_1 > \frac{1}{s_1}$	Inferior	$\iota_2 < 0$

4.2 Condición de agregación de Cournot

De la condición de equilibrio y de la restricción presupuestaria, se obtiene,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^m (\mathbf{p}, m_i) = m_i$$

Diferenciando respecto al precio de un bien, dado el nivel del ingreso monetario y los otros precios,

$$x_j^m dp_j + p_j \frac{\partial x_j^m}{\partial p_j} dp_j + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_k^m}{\partial p_j} dp_j = 0 \quad ; \quad \forall k \neq j$$

Luego, multiplicando y dividiendo el segundo sumando por x_j^m; asimismo cada componente del tercer sumando, por x_k^m, se tiene,

$$x_j^m + p_j x_j^m \frac{\partial x_j^m}{\partial p_j} \frac{1}{x_j^m} + \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^m \frac{\partial x_k^m}{\partial p_j} \frac{1}{x_k^m} = 0$$

Así, multiplicamos cada sumando por $\dfrac{p_j}{m_i}$ y reordenando,

$$\frac{p_j x_j^m}{m_i} + \frac{p_j x_j^m}{m_i} \frac{\partial x_j^m}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_j^m} + \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k x_k^m}{m_i} \frac{\partial x_k^m}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_k^m} = 0$$

Reemplazando por las notaciones de las elasticidades y de los pesos de gasto, se tiene,

$$s_j + s_j \varepsilon_j + \sum_{k=1}^{n} s_k \varepsilon_{kj} = 0$$

De donde:

$$-s_j \left(1 + \varepsilon_j\right) = \sum_{k=1}^{n} s_k \varepsilon_{kj}$$

Para el caso donde $X_i = \mathbb{R}_+^2$, se tiene:

$$-s_1 \left(1 + \varepsilon_1\right) = s_2 \varepsilon_{21}$$

De donde derivamos, dado que se sabe que las proporciones de gasto, s_1 y s_2, pertenecen al intervalo $\left(0,1\right)$; la siguiente tabla de correspondencia entre ambos bienes,

B_1		B_2	
Elástico	$\varepsilon_1 < -1$	Sustituto bruto	$\varepsilon_{21} > 0$
Elasticidad unitaria	$\varepsilon_1 = -1$	Independiente	$\varepsilon_{21} = 0$
Inelástico	$-1 < \varepsilon_1 < 0$	Complementario bruto	$0 > \varepsilon_{21} > -\frac{s_1}{s_2}$
Perfectamente inelástico	$\varepsilon_1 = 0$	Complementario bruto	$\varepsilon_{21} = -\frac{s_1}{s_2}$
Giffen	$\varepsilon_1 > 0$	Complementario bruto	$\varepsilon_{21} < -\frac{s_1}{s_2}$

4.3 Condición de simetría de Hicks

Del Lema de Shepard, obtenemos,

$$x_k^h = \frac{\partial G_i}{\partial p_k}$$

Diferenciando respecto al precio de otro bien, y considerando que el efecto sustitución cruzado es simétrico, se obtiene,

$$\frac{\partial x_k^h}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 G_i}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial^2 G_i}{\partial p_k \partial p_j} = \frac{\partial x_j^h}{\partial p_k}$$

Así se enuncia que,

$$\frac{\partial x_k^h}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^h}{\partial p_k}$$

Luego, multiplicando un lado de la igualdad por $\frac{p_k x_k^h}{m_i} \frac{p_j}{x_k^h} \frac{m_i}{p_j x_j^h} \frac{x_j^h}{p_k}$ y despejando adecuadamente,

$$\frac{p_k x_k^h}{m_i} \frac{\partial x_k^h}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_k^h} = \frac{p_j x_j^h}{m_i} \frac{\partial x_j^h}{\partial p_k} \frac{p_k}{x_j^h}$$

Reemplazando por la notación de las elasticidades, se tiene una relación simétrica entre las elasticidades cruzadas de la demanda compensada como,

$$s_k \eta_{kj} = s_j \eta_{jk}$$

Para el caso donde $X_i = \mathbb{R}_+^2$, se tiene:

$$s_1 \eta_{12} = s_2 \eta_{21}$$

Dado que las proporciones de gasto, s_1 y s_2, pertenecen al intervalo $(0,1)$; se obtiene la siguiente tabla de correspondencia entre ambos bienes,

	B1 | B2
	Sustitutos netos $\eta_{12}, \eta_{21} < 0$
$\frac{s_1}{s_2} > 1$	$\lvert\eta_{12}\rvert < \lvert\eta_{21}\rvert$
$\frac{s_1}{s_2} = 1$	$\lvert\eta_{12}\rvert = \lvert\eta_{21}\rvert$
$\frac{s_1}{s_2} < 1$	$\lvert\eta_{12}\rvert > \lvert\eta_{21}\rvert$

4.4 Condición de homogeneidad de la demanda marshalliana

Del teorema de Euler, dado que las funciones de demanda marshallianas son homogéneas de grado cero respecto a precios e ingreso, se deriva,

$$\frac{\partial x_k^m}{\partial p_k} p_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_k^m}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial x_k^m}{\partial m_i} m_i = 0 \quad ; \quad \forall j \neq k$$

Realizando los ajustes debidos, dividiendo todos los sumando por x_k^m, se obtiene,

$$\frac{\partial x_k^m}{\partial p_k} \frac{p_k}{x_k^m} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_k^m}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_k^m} + \frac{\partial x_k^m}{\partial m_i} \frac{m_i}{x_k^m} = 0 \quad ; \quad \forall j \neq k$$

Reemplazando la fórmula por las notaciones de las elasticidades,

$$\varepsilon_k + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{kj} + \iota_k = 0 \quad ; \quad \forall j \neq k$$

De donde se obtiene:

$$-\iota_k = \varepsilon_k + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{kj} \quad ; \quad \forall j \neq k$$

Para el caso donde el espacio de consumo está conformado solo por dos bienes, tal que $X_i = \mathbb{R}^2_+$, se tiene:

$$-\iota_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_{12}$$

Dado que las proporciones de gasto, s_1 y s_2, pertenecen al intervalo $(0,1)$; se obtiene la siguiente tabla de correspondencia entre ambos bienes,

B2		B1				
Sustituto bruto	$\varepsilon_{12} > 0$	Giffen	$\varepsilon_1 > 0$		Inferior	$\iota_1 < 0$
Sustituto bruto	$\varepsilon_{12} > 0$	Perfectamente inelástico	$\varepsilon_1 = 0$		Inferior	$\iota_1 < 0$
Sustituto bruto	$\varepsilon_{12} > 0$	Inelástico	$-1 < \varepsilon_1 < 0$	$\lvert\varepsilon_{12}\rvert > \lvert\varepsilon_1\rvert$	Inferior	$\iota_1 < 0$
Sustituto bruto	$\varepsilon_{12} > 0$	Inelástico	$-1 < \varepsilon_1 < 0$	$\lvert\varepsilon_{12}\rvert = \lvert\varepsilon_1\rvert$	Neutro	$\iota_1 = 0$
Sustituto bruto	$\varepsilon_{12} > 0$	Inelástico	$-1 < \varepsilon_1 < 0$	$\lvert\varepsilon_{12}\rvert < \lvert\varepsilon_1\rvert$	Normal	$\iota_1 > 0$
Sustituto bruto	$\varepsilon_{12} > 0$	Elástico	$\varepsilon_1 < -1$	$\lvert\varepsilon_{12}\rvert > \lvert\varepsilon_1\rvert$	Inferior	$\iota_1 < 0$
Sustituto bruto	$\varepsilon_{12} > 0$	Elástico	$\varepsilon_1 < -1$	$\lvert\varepsilon_{12}\rvert = \lvert\varepsilon_1\rvert$	Neutro	$\iota_1 = 0$
Sustituto bruto	$\varepsilon_{12} > 0$	Elástico	$\varepsilon_1 < -1$	$\lvert\varepsilon_{12}\rvert < \lvert\varepsilon_1\rvert$	Normal	$\iota_1 > 0$
Complementario bruto	$\varepsilon_{12} < 0$	Inelástico	$-1 < \varepsilon_1 < 0$		Normal	$\iota_1 > 0$
Complementario bruto	$\varepsilon_{12} < 0$	Elástico	$\varepsilon_1 < -1$		Superior	$\iota_1 > 1$

4.5 Condición de homogeneidad de la demanda hicksiana

Del teorema de Euler, dado que las funciones de demanda hicksianas son homogéneas de grado cero respecto a precios, se deriva,

$$\frac{\partial x_k^h}{\partial p_k} p_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_k^h}{\partial p_j} p_j = 0 \quad ; \quad \forall j \neq k$$

Dividiendo todos los sumandos por x_k^h, obteniéndose,

$$\frac{\partial x_k^h}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_k^h}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_k^h}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_k^h}=0 \quad ; \quad \forall j\neq k$$

Reemplazando por la notación de elasticidades,

$$\eta_k+\sum_{j=1}^{n}\eta_{kj}=0 \quad ; \quad \forall j\neq k$$

Para el caso donde $X_i=\mathbb{R}_+^2$, se tiene:

$$\eta_1+\eta_{12}=0$$

Se obtiene la siguiente tabla de correspondencia entre ambos bienes,

B1	B2	
$\eta_1<0$	Sustituto neto	$\eta_{12}<0$

4.6 Condición de negatividad

Como $\eta_{kl}=\frac{\partial^2 G_i}{\partial p_l \partial p_k}\frac{p_l}{x_k}$ y $G_i(\mathbf{p},u_i)$ es una función cóncava; entonces la matriz $[\eta_{kl}]$ ha de ser una matriz semi definida negativa.

4.7 Descomposición de Slutsky

De la ecuación de Slutsky,

$$\frac{\partial x_k^m}{\partial p_j}=\frac{\partial x_k^h}{\partial p_j}-x_j\frac{\partial x_k^m}{\partial m_i}$$

Derivamos,

$$\frac{\partial x_k^m}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_k}=\frac{\partial x_k^h}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_k}-\frac{p_j x_j}{m_i}\frac{\partial x_k^m}{\partial m_i}\frac{m_i}{x_k}$$

Luego, reemplazando por la notación de elasticidades,

$$\varepsilon_{kj}=\eta_{kj}-s_j\iota_k$$

Para el caso donde el espacio de consumo está conformado solo por dos bienes, tal que $X_i = \mathbb{R}_+^2$, se tiene:

$$\varepsilon_{12} = \eta_{12} - s_2 \iota_1$$

Dado que las proporciones de gasto, s_1 y s_2, pertenecen al intervalo $(0,1)$; se obtiene la siguiente tabla de correspondencia entre ambos bienes,

B1		B2				
Normal	$\iota_1 > 0$	Sustituto neto	$\eta_{12} < 0$		Sustituto bruto	$\varepsilon_{12} < 0$
Neutro	$\iota_1 = 0$	Sustituto neto	$\eta_{12} < 0$		Sustituto bruto	$\varepsilon_{12} < 0$
Inferior	$\iota_1 < 0$	Sustituto neto	$\eta_{12} < 0$	$\lvert\eta_{12}\rvert > s_2 \lvert\varepsilon_{12}\rvert$	Sustituto bruto	$\varepsilon_{12} < 0$
Inferior	$\iota_1 < 0$	Sustituto neto	$\eta_{12} < 0$	$\lvert\eta_{12}\rvert = s_2 \lvert\varepsilon_{12}\rvert$	Independiente	$\varepsilon_{12} = 0$
Inferior	$\iota_1 < 0$	Sustituto neto	$\eta_{12} < 0$	$\lvert\eta_{12}\rvert < s_2 \lvert\varepsilon_{12}\rvert$	Complementario bruto	$\varepsilon_{12} > 0$

También se tiene, la ecuación de Slutsky, para efectos cruzados,

$$\frac{\partial x_k^m}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k^h}{\partial p_k} - x_k \frac{\partial x_k^m}{\partial m_i}$$

De donde obtenemos,

$$\frac{\partial x_k^m}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_k} = \frac{\partial x_k^h}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_k} - \frac{p_k x_k}{m_i}\frac{\partial x_k^m}{\partial m_i}\frac{m_i}{x_k}$$

Así,

$$\varepsilon_k = \eta_k - s_k \iota_k$$

Para el caso donde el espacio de consumo está conformado solo por dos bienes, tal que $X_i = \mathbb{R}_+^2$, se tiene:

$$\varepsilon_1 = \eta_1 - s_1 \iota_1$$

Dado que las proporciones de gasto, s_1 y s_2, pertenecen al intervalo $(0,1)$; se obtiene la siguiente tabla,

B1						
Normal	$\iota_1 > 0$	Efecto sustitución	$\eta_1 < 0$		Elástica	$\varepsilon_1 < -1$
Neutro	$\iota_1 = 0$	Efecto sustitución	$\eta_1 < 0$		Elástica Inelástica	$\varepsilon_1 < -1$ $-1 < \varepsilon_1 < 0$
Inferior	$\iota_1 < 0$	Efecto sustitución	$\eta_1 < 0$	$\lvert\eta_1\rvert > s_1\lvert\varepsilon_1\rvert$	Inelástica	$-1 < \varepsilon_1 < 0$
Inferior	$\iota_1 < 0$	Efecto sustitución	$\eta_1 < 0$	$\lvert\eta_1\rvert = s_1\lvert\varepsilon_1\rvert$	Perfectamente inelástica	$\varepsilon_1 = 0$
Inferior	$\iota_1 < 0$	Efecto sustitución	$\eta_1 < 0$	$\lvert\eta_1\rvert < s_1\lvert\varepsilon_1\rvert$	Bien Giffen	$\varepsilon_1 > 0$

5. BIENESTAR DEL CONSUMIDOR

En el problema de optimización del consumidor, la función de utilidad, $u_i(\mathbf{x}):\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ es una función ordinal. Para tener una medida (cardinal) del bienestar del consumidor, expresado en términos monetarios, simplemente realizamos una transformación monótona de la función de utilidad, $u_i(\mathbf{x})$. En este caso,

$$G_i = G_i(\mathbf{p}, u_i)$$

Entonces, utilizaremos la función de gasto mínimo como una buena aproximación de la función de utilidad.[4] El análisis clásico sobre el bienestar del consumidor, medido a partir del excedente del consumidor, podemos encontrarlo en los desarrollos de John Hicks.[5]

---

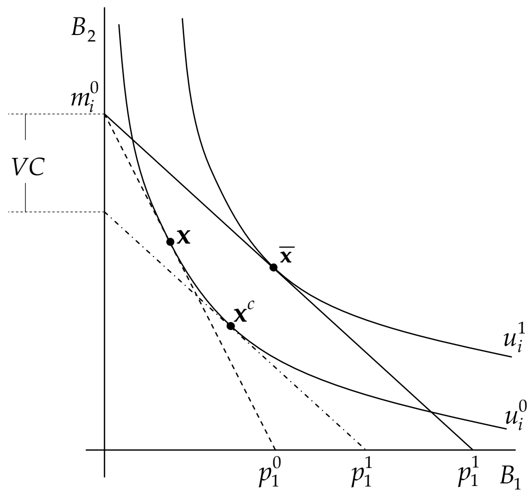
4 Recuérdese que $G_i(\mathbf{p}, u_i^0)$ es estrictamente creciente en u_i^0.

5 Ver Hicks (1945: pp. 35 – 41; 1986: pp. 130 – 149).

5.1 Variación Compensatoria (VC)

La variación compensatoria mide lo máximo que el individuo estaría dispuesto a pagar o a que se le reste de su ingreso monetario, de tal manera ante el cambio de precio permanece en una situación de bienestar similar a como si no se hubiese dado el cambio de precio.

Para facilitar la exposición, supondremos que el espacio de consumo es $X_i = \mathbb{R}_+^2$ y que $p_2^0 = 1$. Luego, sea un descenso del precio de B_1. Se tiene,



La variación compensatoria será,

$$VC = G_i\left(p_1^1, p_2^0, u_i^1\right) - G_i\left(p_1^1, p_2^0, u_i^0\right)$$
$$VC = m_i^0 - G_i\left(p_1^1, p_2^0, u_i^0\right)$$
$$VC = G_i\left(p_1^0, p_2^0, u_i^0\right) - G_i\left(p_1^1, p_2^0, u_i^0\right)$$

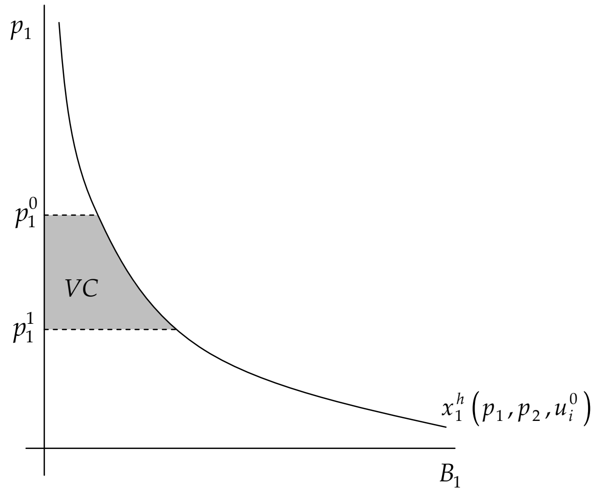
Luego,

$$VC = \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial G_i}{\partial p_1} dp_1$$

Por el lema de Shephard,

$$VC = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1^h\left(p_1, p_2, u_i^0\right) dp_1$$

Gráficamente:



Para el caso en que el espacio de consumo sea $X_i = \mathbb{R}_+^n$ y varían todos los precios de los bienes, siendo estos cambios pequeños, entonces la variación compensatoria viene dado por,

$$VC = G_i\left(p_1^0,\ldots,p_n^0,u_i^0\right) - G_i\left(p_1^1,\ldots,p_n^1,u_i^0\right)$$

$$\begin{aligned} VC = {} & G_i\left(p_1^0,\ldots,p_n^0,u_i^0\right) - G_i\left(p_1^1,p_2^0,\ldots,p_n^0,u_i^0\right) + G_i\left(p_1^1,p_2^0,\ldots,p_n^0,u_i^0\right) - G_i\left(p_1^1,p_2^1,p_3^0,\ldots,p_n^0,u_i^0\right) \\ & + G_i\left(p_1^1,p_2^1,p_3^0,\ldots,p_n^0,u_i^0\right) - \ldots + G_i\left(p_1^1,\ldots,p_{n-1}^1,p_n^0,u_i^0\right) - G_i\left(p_1^1,\ldots,p_n^1,u_i^0\right) \end{aligned}$$

De donde,

$$VC = \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial G_i}{\partial p_1} dp_1 + \int_{p_2^1}^{p_2^0} \frac{\partial G_i}{\partial p_2} dp_2 + \ldots + \int_{p_n^1}^{p_n^0} \frac{\partial G_i}{\partial p_n} dp_n$$

Luego, por el lema de Shephard,

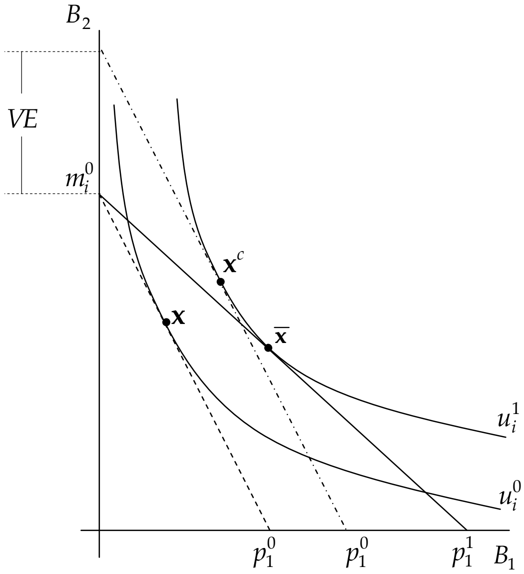
$$VC = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1^h\left(p_1,\ldots,p_n,u_i^0\right) dp_1 + \int_{p_2^1}^{p_2^0} x_2^h\left(p_1,\ldots,p_n,u_i^0\right) dp_2 + \ldots + \int_{p_n^1}^{p_n^0} x_n^h\left(p_1,\ldots,p_n,u_i^0\right) dp_n$$

Una variación compensatoria negativa implicaría que el bienestar del consumidor ha empeorado, en tanto que una variación compensatoria positiva indicaría que el bienestar del consumidor ha mejorado.

5.2 Variación Equivalente (VE)

La variación equivalente mide lo mínimo que el consumidor estaría dispuesto a aceptar de ingreso monetario, de tal manera que permanecería en una situación bienestar similar a la que se encontraría si es que se diese el cambio deprecio. Sería una cantidad de riqueza adicional equivalente al efecto de los cambios en los precios, en términos de bienestar (ingreso real a lo Hicks).

Supondremos, igual que en la variación compensatoria, un espacio de consumo dado por $X_i = \mathbb{R}_+^2$, $p_2^0 = 1$ y un descenso del precio de B_1.



La variación equivalente será,

$$VE = G_i\left(p_1^0, p_2^0, u_i^1\right) - G_i\left(p_1^0, p_2^0, u_i^0\right)$$
$$VE = G_i\left(p_1^0, p_2^0, u_i^1\right) - m_i^0$$
$$VE = G_i\left(p_1^0, p_2^0, u_i^1\right) - G_i\left(p_1^1, p_2^0, u_i^1\right)$$

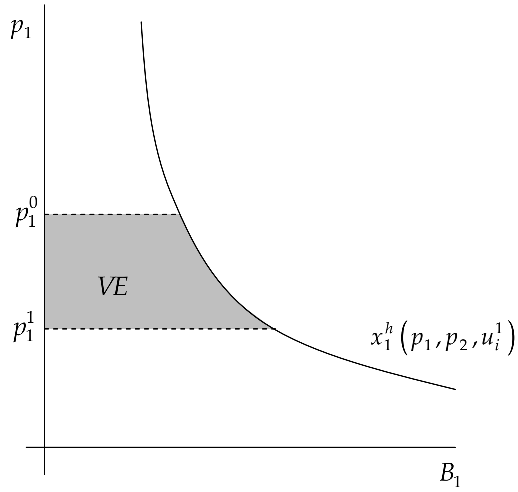
Luego,

$$VE = \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial G_i}{\partial p_1} dp_1$$

Por el lema de Shephard,

$$VE = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1^h\left(p_1, p_2, u_i^1\right) dp_1$$

Gráficamente:



Para el caso en que el espacio de consumo es $X_i = \mathbb{R}_+^n$ y donde ocurren variaciones pequeñas de todos los precios de los bienes; la variación equivalente viene dado por,

$$VE = G_i\left(p_1^0,\ldots,p_n^0,u_i^1\right) - G_i\left(p_1^1,\ldots,p_n^1,u_i^1\right)$$

$$\begin{aligned} VE = {} & G_i\left(p_1^0,\ldots,p_n^0,u_i^1\right) - G_i\left(p_1^1,p_2^0,\ldots,p_n^0,u_i^1\right) + G_i\left(p_1^1,p_2^0,\ldots,p_n^0,u_i^1\right) - G_i\left(p_1^1,p_2^1,p_3^0,\ldots,p_n^0,u_i^1\right) \\ & + G_i\left(p_1^1,p_2^1,p_3^0,\ldots,p_n^0,u_i^1\right) - \ldots + G_i\left(p_1^1,\ldots,p_{n-1}^1,p_n^0,u_i^1\right) - G_i\left(p_1^1,\ldots,p_n^1,u_i^1\right) \end{aligned}$$

De donde,

$$VE = \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial G_i}{\partial p_1} dp_1 + \int_{p_2^1}^{p_2^0} \frac{\partial G_i}{\partial p_2} dp_2 + \ldots + \int_{p_n^1}^{p_n^0} \frac{\partial G_i}{\partial p_n} dp_n$$

Luego, por el lema de Shephard,

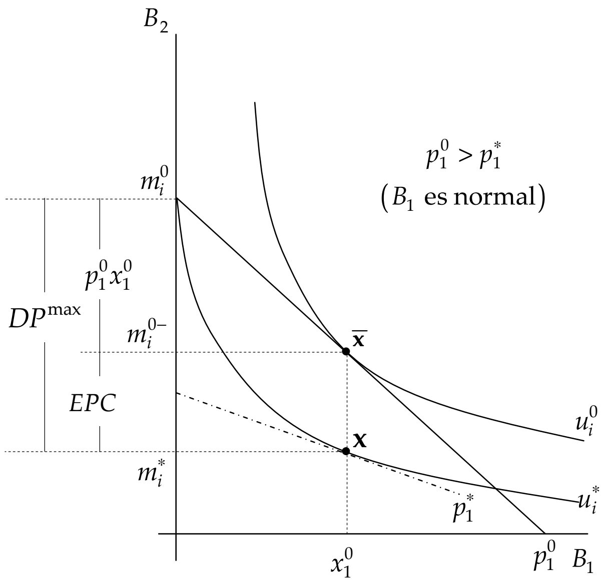
$$VE = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1^h\left(p_1,\ldots,p_n,u_i^1\right) dp_1 + \int_{p_2^1}^{p_2^0} x_2^h\left(p_1,\ldots,p_n,u_i^1\right) dp_2 + \ldots + \int_{p_n^1}^{p_n^0} x_n^h\left(p_1,\ldots,p_n,u_i^1\right) dp_n$$

Una variación equivalente negativa implicaría que el bienestar del consumidor ha empeorado, en tanto que una variación equivalente positiva indicaría que el bienestar del consumidor ha mejorado.

5.3 Excedente Puro del Consumidor (EPC)

Es una medida del efecto sobre el bienestar ante un cambio del precio de un bien, considerando un nivel referencial de consumo del mismo bien. El excedente puro del consumidor se define como la diferencia entre el valor máximo que está dispuesto a pagar el consumidor, $DP^{\max}$, y lo que efectivamente paga, $p_1^0 x_1^0$, por la cantidad referida del bien B1.

Asumiremos que el precio del bien B_2 es $p_2^0 = 1$, el ingreso está dado y es igual a m_i^0, y por último, el consumidor está comprando una cantidad de B_1 igual a x_1^0 al precio p_1^0. También asumiremos, para poder determinar la disposición máxima a pagar por parte del consumidor, que existe una canasta $\mathbf{x}$ que contiene la cantidad en particular del bien B_1 y que le es indiferente a una canasta donde gasta todo su ingreso en B_2 y no compra nada de B_1. Gráficamente,



Del gráfico se sabe que el excedente puro del consumidor es,

$$EPC = m_i^{0-} - m_i^*$$

Además se sabe que,

$$m_i^{0-} = m_i^0 - p_1^0 x_1^0 = G_i\left(p_1^0, p_2^0, u_i^0\right) - p_1^0 x_1^0$$

$$m_i^* = G_i\left(p_1^*, p_2^0, u_i^*\right) - p_1^* x_1^0$$

Reemplazando en la ecuación del *EPC*, se tiene,

$$EPC = G_i\left(p_1^0, p_2^0, u_i^0\right) - p_1^0 x_1^0 - G_i\left(p_1^*, p_2^0, u_i^*\right) + p_1^* x_1^0$$

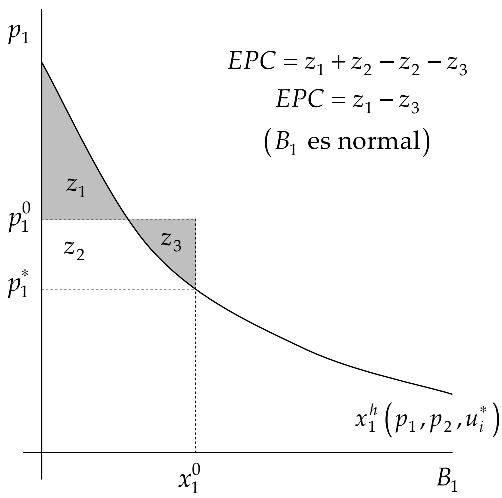
Reordenando,

$$EPC = G_i\left(p_1^0, p_2^0, u_i^0\right) - G_i\left(, p_2^0, u_i^*\right) - \left(p_1^0 - p_1^*\right) x_1^0$$
$$EPC = G_i\left(p_1 = \infty, p_2^0, u_i^*\right) - G_i\left(p_1^*, p_2^0, u_i^*\right) - \left(p_1^0 - p_1^*\right) x_1^0$$
$$EPC = \int_{p_1^*}^{\infty} \frac{\partial G_i}{\partial p_1} dp_1 - \left(p_1^0 - p_1^*\right) x_1^0$$

Por el lema de Shephard,

$$EPC = \int_{p_1^*}^{\infty} x_1^h dp_1 - \left(p_1^0 - p_1^*\right) x_1^0$$

Gráficamente,



5.4 Excedente Marshalliano del Consumidor (EMC)

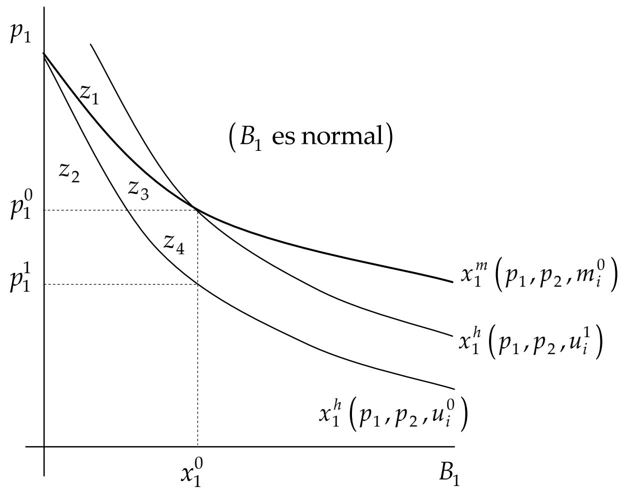
Mide el efecto sobre el bienestar del consumidor ante un cambio del precio de un bien, evaluando sobre una cantidad determinada del mismo bien. Se evalúa sobre la función de demanda marshalliana. Quedando,

$$EMC = \int_{p_1^0}^{\infty} x_1^m dp_1$$

El excedente marshalliano traduce el efecto sobre el bienestar considerando el efecto sustitución y el efecto ingreso.

5.5 Evaluación de las Medidas del Bienestar para el caso de B_1 Normal

Consideraremos el caso en el que el bien B_1 es un bien normal, luego evaluaremos una variación del precio de B_1 de $p_1 = p_1^0$ a $p_1 = \infty$. Gráficamente,



Las medidas de bienestar para este caso, serán,

- Variación compensatoria:

  $VC = z_2$

- Variación equivalente:

  $VE = z_1 + z_2 + z_3$

- Excedente puro del consumidor

  $EPC = z_2 - z_4$

- Excedente marshalliano del consumidor

  $EMC = z_2 + z_3$

Así, para el caso en el que el bien B_1 es un bien normal, la relación entre estas medidas del bienestar vendrían dadas por,

$$VE > EMC > VC > EPC$$

REFERENCIAS

[1] ÁVALOS, Eloy. (2010), *La teoría del consumidor: la demanda individual*. Documento de Trabajo Nº 7. Lima: Centro de Investigaciones Económicas del Instituto de Estudios Sociales del Rímac.

[2] BECKER, Gary. (1977), *Teoría económica.* México: Fondo de Cultura Económica.

[3] FRIEDMAN, Milton. (1976), *Teoría de los precios*. Madrid: Alianza Editorial.

[4] HICKS, John. (1986), *Riqueza y bienestar. Ensayos sobre teoría económica*. México: Fondo de Cultura Económica.

[5] HICKS, John. (1945), *Valor y capital. Investigación sobre algunos principios fundamentales de teoría económica*. México: fondo de Cultura Económica.